Devoir maison n^{o} 7 : Correction

Exercice 1. Puissances d'une matrice (*d'après ATS 2025*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Les deux parties sont indépendantes.*

Partie A - Éléments propres

1. a) Soient $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que U et V sont deux vecteurs propres de A associés à la même valeur propre α donc vous préciserez la valeur.

D'abord $\boxed{U \text{ et } V \text{ sont non nuls}}$. Puis par calcul, on a $\boxed{AU = 2U \text{ et } AV = 2V}$, *i.e.* U et V sont deux vecteurs propres de A associés à la $\boxed{\text{valeur propre } \alpha = 2}$.

b) Calculer le rang de $A - \alpha \mathrm{I}_3$ et en déduire la dimension du sous-espace propre associé à α.

• On a $A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de $\boxed{\text{rang } 1}$ car la 2$^{\text{è}}$ ligne est nulle et la 3$^{\text{è}}$ est égale à la 1$^{\text{ère}}$ (elle-même non nulle).
• On sait que l'espace propre associé est $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I}_3)$. Or d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I}_3)) + \mathrm{rg}(A - 2\mathrm{I}_3) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, d'où $\boxed{\dim(E_2) = 2}$.

c) Donner une base de cet espace vectoriel.

D'après la question précédente, E_2 est un espace vectoriel de dimension 2. Or, d'après Q1a, U et V sont deux vecteurs de E_2 et ils forment une famille libre (ils sont clairement non colinéaires). Ainsi, on a $E_2 = \mathrm{Vect}(U, V)$ et $\boxed{(U, V) \text{ est une base de } E_2}$.

2. a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

On commence par développer selon la deuxième ligne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 2 \\ 0 & X-2 & 0 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} \overset{\text{dvp L}_2}{=} (X-2) \begin{vmatrix} X-3 & 2 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-2)\left[(X-3)X - (-2)\right].$$
$$= (X-2)(X^2 - 3X + 2) = (X-2)(X-1)(X-2) = \boxed{(X-1)(X-2)^2}.$$

b) En déduire que A admet deux valeurs propres α (déterminée en Q1) et β. Préciser la valeur de β.

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique donc, d'après la question précédente, $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}}$ (avec $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$). En particulier $\alpha = 2$ et $\boxed{\beta = 1}$.

3. a) En déduire que la matrice A est diagonalisable.

D'après Q1b, on a $\dim(E_2) = 2$. De plus, on sait que $1 \leqslant \dim(E_1) \leqslant m_1 = 1$ donc nécessairement $\dim(E_1) = 1$. Ainsi $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 3$ (= taille de A) donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

b) Donner $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

• D'après la question précédente, comme A est diagonalisable, de telles matrices D et P existent. D'après Q2b, on peut prendre $\boxed{D = \mathrm{diag}(1, 2, 2)}$.

• Pour P, il nous faut une base de chaque sous-espace propre. D'après Q1c, on en a déjà une pour E_2. Déterminons-en une pour E_1.

Méthode 1 : On résout le système $AX = 1X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On aboutit à $\begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}$. Les vecteurs de E_1 sont donc de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $E_1 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Méthode 2 : On remarque que $W = (1, 0, 1)^\top \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ vérifie $AW = W$, *i.e.* est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. Or on a vu à la question précédente que $\dim(E_1) = 1$ donc W forme une base de E_1.

• Finalement, on prend pour P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de W, U et V dans la base canonique (attention à prendre un ordre cohérent avec celui des valeurs propres dans D), *i.e.* $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie B - Puissances par la formule du binôme de Newton

4. Soit $B = A - 2\mathrm{I}_3$. Calculer B^2 puis démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $B^n = (-1)^{n+1}B$.

• On a $B = A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ puis par calcul $\boxed{B^2 = -B}$.

• Par récurrence. D'abord, $B^1 = B$ et $(-1)^{1+1}B = B$ donc la propriété est initialisée.
Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $B^n = (-1)^{n+1}B$. Alors $B^{n+1} = B^n \times B = (-1)^{n+1}B \times B = (-1)^{n+1}B^2 = (-1)^{n+1}(-B) = (-1)^{n+2}B$, la propriété est donc héréditaire.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = (-1)^{n+1}B}$.

5. En déduire l'expression de A^n en fonction de n, A et I_3, pour tout entier naturel n non nul.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} A^n &= (B + 2\mathrm{I}_3)^n && \textit{Binôme de Newton avec } B \textit{ et } 2\mathrm{I}_3 \textit{ qui commutent} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2\mathrm{I}_3)^{n-k} && ⚠\ \textit{Q4 non valable pour } k = 0 \textit{ donc terme à part} \\ &= \binom{n}{0} B^0 (2\mathrm{I}_3)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k (2\mathrm{I}_3)^{n-k} && \textit{Q4 et } \mathrm{I}_3^{n-k} = \mathrm{I}_3 \\ &= 2^n \mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} 2^{n-k} B \\ &= 2^n \mathrm{I}_3 - \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} \right) B \end{aligned}$$

Or, d'après le binôme de Newton, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} = (-1 + 2)^n = 1^n = 1$, d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} - \underbrace{\binom{n}{0} (-1)^0 2^n}_{\text{terme } k=0} = 1 - 2^n.$$

Par conséquent, $A^n = 2^n \mathrm{I}_3 - (1 - 2^n)B = 2^n \mathrm{I}_3 - (1 - 2^n)(A - 2\mathrm{I}_3) = \boxed{(2^n - 1)A + (2 - 2^n)\mathrm{I}_3}$.

Exercice 2. (*d'après E3A PC 2019*)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ et a un réel.
On considère l'application ϕ_a définie sur E par $\forall P \in E$, $\phi_a(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)P' + aXP$.

1. Déterminer toutes les valeurs du réel a pour lesquelles ϕ_a est un endomorphisme de E.

- Montrons d'abord que ϕ_a est linéaire. Soient P, $Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\phi_a(\lambda P + Q) &= \left(\tfrac{1}{4} - X^2\right)(\lambda P + Q)' + aX(\lambda P + Q)\\ &= \left(\tfrac{1}{4} - X^2\right)(\lambda P' + Q') + \lambda aXP + aXQ\\ &= \lambda\left[\left(\tfrac{1}{4} - X^2\right)P' + aXP\right] + \left(\tfrac{1}{4} - X^2\right)Q' + aXQ\\ &= \lambda\phi_a(P) + \phi_a(Q).\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\phi_a \text{ est linéaire}}$.
- Cherchons maintenant pour quelles valeurs de a, l'application ϕ_a est à valeurs dans E.

Soit $P \in E$. $\phi_a(P)$ est un polynôme et par propriétés usuelles du degré, on a $\deg(\phi_a(P)) \leqslant 1 + \deg(P)$.
En particulier, si $\deg(P) \leqslant 2n - 1$, on a $\deg(\phi_a(P)) \leqslant 2n$ donc $\phi_a(P) \in E$.
Soit maintenant $P \in E$ tel que $\deg(P) = 2n$. On note $b_{2n} \neq 0$ son coefficient dominant. Le terme de degré $2n+1$ de $\phi_a(P)$ a pour coefficient $-2nb_{2n} + ab_{2n} = (a - 2n)b_{2n}$. Par conséquent, $\phi_a(P) \in E$ si et seulement si ce coefficient est nul, *i.e.* si et seulement si $a = 2n$.
Finalement, $\boxed{\phi_a \text{ est un endomorphisme de } E \text{ si et seulement si } a = 2n}$.

Désormais a est choisi de sorte que ϕ_a est un endomorphisme de E.

2. Soit $k \in [\![-n\,;n]\!]$. Déterminer α et β dans $\mathbb{N}$ de sorte que le polynôme $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$ soit un vecteur propre de ϕ_a associé à la valeur propre k.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ avec $\alpha + \beta \leqslant 2n$ pour avoir $P \in E$. On veut $\boxed{\phi_a(P) = kP}$, on calcule donc $\phi_a(P)$.
Pour cela, en utilisant :

- $P' = \alpha\left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta + \beta\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1}$;
- $\frac{1}{4} - X^2 = \left(\frac{1}{2} + X\right)\left(\frac{1}{2} - X\right) = -\left(X + \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right)$;

et en factorisant, on obtient

$$\phi_a(P) = \left(X + \tfrac{1}{2}\right)^\alpha\left(X - \tfrac{1}{2}\right)^\beta\left[-\alpha\left(X - \tfrac{1}{2}\right) - \beta\left(X + \tfrac{1}{2}\right) + 2nX\right] = P \times \left[(-\alpha - \beta + 2n)X + \tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\beta}{2}\right].$$

Ainsi

$$\phi_a(P) = kP \iff \begin{cases} -\alpha - \beta + 2n = 0 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = k \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 2n \\ \alpha - \beta = 2k \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = n + k \\ \beta = n - k. \end{cases}$$

Remarque : on a bien $\alpha + \beta \leqslant 2n$ donc $P \in E$.
Finalement, pour $\boxed{\alpha = n + k \text{ et } \beta = n - k}$, P est un polynôme non nul de E tel que $\phi_a(P) = kP$, *i.e.* P est un vecteur propre de ϕ_a associé à la valeur propre k.

3. En déduire que ϕ_a est diagonalisable et donner une base de chaque sous-espace propre.

- D'après la question précédente, chaque $k \in [\![-n\,;n]\!]$ est une valeur propre de ϕ_a. On a donc $2n+1$ valeurs propres distinctes et $\dim(E) = 2n + 1$ donc $\boxed{\phi_a \text{ est diagonalisable}}$.
- De plus, comme chaque valeur propre k est de multiplicité 1, l'espace propre associé E_k est de dimension 1. Or d'après la question précédente, on en connaît un élément non nul donc celui-ci forme une base de E_k, *i.e.* $\boxed{\forall k \in [\![1\,;n]\!],\ E_k = \mathrm{Vect}\left(\left(X + \tfrac{1}{2}\right)^{n+k}\left(X - \tfrac{1}{2}\right)^{n-k}\right)}$.